«Достаточные условия применимости полиэдральных аппроксимаций в задаче быстродействия для линейной дискретной системы»

Порцева Е.Ю., студентка группы 8о-204м
Сиротин А.Н., профессор кафедры 804

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Москва 2019

Дополнительное построение

Лемма 3

Пусть отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *непрерывно, тогда* $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *непрерывно.*

Лемма 4

Пусть для каждого $k = \overline{1, N}$ *последовательность* $\{\mathcal{X}_m^k\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$ *сходится к* $\mathcal{X}^k \in \mathbb{K}_n$:

$$\rho_H(\mathcal{X}_m^k, \mathcal{X}^k) \xrightarrow{m \to \infty} 0.$$

Тогда

$$\rho_H\left(\sum_{k=1}^{N} \mathcal{X}_m^k, \sum_{k=1}^{N} \mathcal{X}^k\right) \xrightarrow{m \to \infty} 0.$$

Обзор литературы

- *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.:Наука, 1969.
- *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.:ИИЛ, 1960.
- *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // Труды МАИ. 2015. №83.
- *Ибрагимов Д.Н.* Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстродействия линейной дискретной системой // Труды МАИ. 2016, №87.
- *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.:Вычислительный центр РАН, 2010.

1. Постановка задачи

Решается задача быстродействия для линейной дискретной системы управления

$$x(i+1) = Ax(i) + u(i), \quad u(i) \in \mathcal{U}, \quad i = 0, 1, \ldots \qquad (1)$$

$x(i) \in \mathbb{R}^n$, $u(i) \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, 0 \in \mathrm{ri}\, \mathcal{U}$, $\mathrm{diam}\, \mathcal{U} < \infty$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det\, A \neq 0$.

$$N_{min} = \min\{N \in \mathbb{N} \colon \exists u(0), \ldots, u(N-1) \in \mathcal{U} \colon x(N) = 0\}.$$

2. Класс множеств 0-управляемости

Определение 1.
Множество начальных состояний системы, из которых систему $(A, \mathcal{U})$ можно перевести в 0 за N шагов посредством выбора допустимого управления называется множеством 0-управляемости за N шагов:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 : \exists u(0), \ldots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ 0, & N = 0. \end{cases}$$

$$N_{min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N)\}.$$

Лемма 1 [Ибрагимов Д.Н. // Труды МАИ, 2015]

Семейство множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ описывается соотношениями

$$\mathcal{X}(N) = -\sum_{i=1}^{N} A^{-i}\mathcal{U}.$$

3. Структура оптимального управления в случае линейных ограничений

$$S_N(x) = \arg\min_{|u|\leqslant 1} \mu(x+u, \mathcal{X}(N)) \tag{7}$$

$$\begin{cases} \alpha^* = \min \alpha \\ x + u = \sum\limits_{i=1}^{M} \beta_i v^i \\ 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha, \;\; i = \overline{1, M} \\ \sum\limits_{i=1}^{M} \beta_i = \alpha, \\ u \in \mathcal{U} \end{cases} \tag{8}$$

где $\mathcal{X}(N) = \operatorname{conv}\{v^1, \dots, v^M\}$.

4. Критерий оптимальности в случае линейных ограничений

Теорема 1 [Ибрагимов Д.Н. // Труды МАИ, 2015]

Пусть зафиксирована некоторая точка $x \in \mathbb{R}^n$ *такая, что* $x \in \mathcal{X}(N_{min}) \setminus \mathcal{X}(N_{min}-1)$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *– многогранник, последовательность* $\{x(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$, *определяется рекуррентным соотношением*

$$x(k) = Ax(k-1) + S_{N_{min}-k}(Ax(k-1)),\ k = \overline{1, N_{min}}, \quad x(0) = x$$

Тогда
1) $x(N_{min}) = 0$.
2) Управление $u^*(x(k-1)) = S_{N_{min}-k}(Ax(k-1))$ *явялется оптимальным позиционным управлением в рассматриваемой задаче быстродействия.*

4. Постановка задачи об аппроксимации

Если последрвательности $\{\underline{\mathfrak{U}}_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\overline{\mathfrak{U}}_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}_n$ многогранников в $\mathbb{R}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют включению

$$\underline{\mathfrak{U}_m} \subset \mathfrak{U} \subset \overline{\mathfrak{U}_m}$$

То справедлива оценка

$$\underline{N_{min}}(m) \geq N_{min} \geq \overline{N_{min}}(m).$$

Задача

Требуется определить достаточные условия построения последовательностей $\{\underline{\mathfrak{U}}_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\overline{\mathfrak{U}}_m\}_{m=1}^{\infty}$ *многогранников в* $\mathbb{R}^n$ *таких, что для некоторого* $m_0 \in \mathbb{N}$ *будет выполнено равенство*

$$\underline{N_{min}}(m_0) = N_{min} = \overline{N_{min}}(m_0).$$

5. Лемма о внутренней сходимости

Лемма 1

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}_n$ *– выпуклые компакты,* $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \varepsilon$, $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{X}$. *Тогда* $x_0 \in \mathcal{Y}$.

Следствие 1

Пусть $\{\mathcal{X}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$ *– последовательность выпуклых компактов,* $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ *– выпуклый компакт такой, что для каждого* $m \in \mathbb{N}$ *верно включение* $\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}$,

$$\rho_H(\mathcal{X}_m, \mathcal{X}) \stackrel{\text{m}\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тогда для всех $x_0 \in \mathrm{int}\mathcal{X}$ *найдётся* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что* $x_0 \in \mathcal{X}_N$.

6. Лемма о внешней сходимости

Лемма 2

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ *– выпуклые компакты,*
$\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \varepsilon$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *такой, что* $B_\varepsilon(x_0) \cap \mathcal{X} = \varnothing$.
Тогда $x_0 \notin \mathcal{Y}$.

Следствие 2

Пусть $\{\mathcal{X}_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$ *– последовательность выпуклых компактов, существует* $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ *– выпуклый компакт такой, что для каждого* $m \in \mathbb{N}$ *верно включение* $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_m$,

$$\rho_H(\mathcal{X}_m, \mathcal{X}) \xrightarrow{\mathrm{m}\to\infty} 0.$$

Тогда для каждого $x_0 \notin \mathcal{X}$ *существует* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что* $x_0 \notin \mathcal{X}_N$.

7. Достаточные условия сходимости для внутренней аппроксимации

Теорема 2

Пусть $\{\underline{\mathfrak{U}_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$ *– последовательность выпуклых компактов такая, что для каждого* $m \in \mathbb{N}$, $\underline{\mathfrak{U}_m} \subset \mathfrak{U}$, $\rho_H(\underline{\mathfrak{U}_m}, \mathfrak{U}) \xrightarrow{m\to\infty} 0$.
Тогда почти для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *для которых* $N_{\min} < \infty$, *существует* $m_1 \in \mathbb{N}$ *такая, что*

$$N_{\min} = \underline{N_{\min}}(m_1),$$

где $\underline{N_{\min}}(m_1)$ *– оптимальное значение критерия в задаче быстродействия для системы* $(A, \underline{\mathfrak{U}_{m_1}})$.

8. Достаточные условия сходимости для внешней аппроксимации

Теорема 3

Пусть $\{\overline{\mathfrak{U}_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$ *– последовательность выпуклых компактов такая, что для каждого* $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{U} \subset \overline{\mathfrak{U}_m}$, $\rho_H(\overline{\mathfrak{U}_m}, \mathfrak{U}) \xrightarrow{m\to\infty} 0$.
Тогда почти для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *для которых* $N_{\min} < \infty$, *существует* $m_2 \in \mathbb{N}$ *такая, что*

$$N_{\min} = \overline{N_{\min}}(m_2),$$

где $\overline{N_{\min}}(m_2)$ *– оптимальное значение критерия в задаче быстродействия для системы* $(A, \overline{\mathfrak{U}_{m_2}})$.

9. Достаточные условия сходимости

Теорема 4

Пусть выполнены условия теорем 4 и 5 одновременно. Тогда существует $m_0 \in \mathbb{N}$ *такая, что*

$$\overline{N_{\min}}(m_0) = N_{\min} = \underline{N_{\min}}(m_0).$$

10. Задача демпфирования. Непрерывная система

$$y(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n(t) \end{pmatrix}, \ v(t) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_1(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{b}{m} = 1, \ \omega^2 = \frac{c}{m} = 100.$$

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + v(t), \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\omega^2 K & -\beta K \end{pmatrix}.$$

[Баландин Д.В., Коган М.М.,2007]

11. Задача демпфирования. Дискретная система

Перейдём к дискретной системе, при помощи следующего преобразования

$$
\begin{aligned}
&x(i) = y(i\triangle t),\\
&v(t) = v_i,\;\; t \in [\triangle t \cdot (i-1); \triangle t \cdot i).
\end{aligned}
$$

Дискретная система имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&x(i+1) = \tilde{A}x(i) + Bu(i),\\
&x(0) = y_0,\;\; u(i) \in \mathcal{U},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^{12} : \;\; u_7^2 + u_9^2 + u_{11}^2 \le 1, u_i = 0, i = 1, \dots, 6, 8, 10, 12\}.$$

Где

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A} = \Phi(\triangle t)\Phi^{-1}(0) \;\; \in \mathbb{R}^{12\times 12},\\
&B = \Phi(\triangle t)\Phi^{-1}(0)A^{-1} - A^{-1} \;\; \in \mathbb{R}^{12\times 12},\\
&u(i) = v_i,\;\; i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
\end{aligned}
$$

$\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений (9)

12. Результаты аппроксимации

Последовательности $\{\underline{\mathcal{U}_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{\overline{\mathcal{U}_k}\}_{k=1}^{\infty}$ построены с помощью метода сближающихся многогранников (Каменев Г.К. 2010) и сходятся к исходному множеству $\mathcal{U}$ в смысле метрики Хаусдорфа. Тогда в силу теорем 2 и 3 верно

$$\overline{N}_{\min}(m) \xrightarrow{\mathrm{m}\to\infty} N_{\min},$$

$$\underline{N}_{\min}(m) \xrightarrow{\mathrm{m}\to\infty} N_{\min},$$

Результаты расчётов приведены в таблице 1:

Таблица 1

m	5	6	7	8
$\overline{N}_{\min}(m)$	5	5	5	5
$\underline{N}_{\min}(m)$	8	8	6	5

13. Основные результаты, выносимые на защиту

1. Сформулировано достаточное условие оптимальности гарантирующего решения, полученного на основе полиэдральной аппроксимации, в задаче быстродействия для линейной дискретной системы
2. Доказана сходимость оптимального значения критерия в задаче быстродействия для внешней и внутренней аппроксимации множества допустимых управлений
3. Проведены расчёты для различных способов полиэдральной аппроксимации в задаче оптимального по быстродействию демпфирования высотного сооружения

14. Публикации

1. Порцева Е.Ю. Метод оценки точности гарантирующего решения в задаче быстродействия для линейной дискретной системы // «Авиация и космонавтика – 2017». 20–24 ноября 2017 года. М.:Люксор. 2017. С.190-191.
2. Порцева Е.Ю., Ибрагимов Д.Н. Достаточные условия оптимальности гарантирующего решения в задаче быстродействия для линейной дискретной системы на основе полиэдральной аппроксимации. // «Авиация и космонавтика – 2018». 19–23 ноября 2018 года. М.:Люксор. 2018. С.457-458.
3. Порцева Е.Ю., Ибрагимов Д.Н. Сравнительный анализ метода полиэдральной аппроксимации в задаче быстродействия для линейной дискретной системы // «Гагаринские чтения – 2019» М.: МАИ. 2019. С.711.
4. Ибрагимов Д.Н., Порцева Е.Ю. Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений для дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2019. № 2. С.83–98.

П1. Метод сближающих многогранников

Если $\underline{\mathfrak{U}}_m$, $\overline{\mathfrak{U}}_m$ – многогранники аппроксимирующие множество сверху и снизу соответственно, то

$$p_m = \arg\max\{\rho_H(p, \overline{\mathfrak{U}}_m) - \rho_H(p, \underline{\mathfrak{U}}_m) : p \in M^f(\underline{\mathfrak{U}}_m)\},$$

$$u_n \in T(p_n, \mathfrak{U}),$$

$$\underline{\mathfrak{U}}_{m+1} = \mathrm{conv}\{u_n, \underline{\mathfrak{U}}_m\}$$

$$\overline{\mathfrak{U}}_{m+1} = \overline{\mathfrak{U}}_m \subset L(p_n, \mathfrak{U}).$$

где $M^f(\underline{\mathfrak{U}}_m)$ - множество опорных векторов аппроксимированного множества управления, $T(p_n, \mathfrak{U})$ - точка касания, $L(p_n, \mathfrak{U})$ - опорное полупространство.