Решение стохастической задачи размещения предприятий методом имитации отжига

Пономаренко Андрей Николаевич, гр. 80-404Б-13

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Факультет прикладной математики и физики
Кафедра теории вероятностей

Научный руководитель: доцент каф. 804, к.ф.-м.н. Иванов С.В.

Москва
2017г.

Техническая постановка задачи

Основные положения:

- один предприниматель, желающий открыть предприятие(ия);
- ограниченное количество мест, в которых можно открыть предприятие за определенную стоимость;
- потребители, у которых есть предпочтения по посещению предприятий;
- случайная доходность от посещения потребителем предприятия.

Детерминированные параметры модели:

I — множество мест для открытия предприятий;

J – множество потребителей;

f — вектор затрат, каждая компонента f_i которого равна стоимости за открытие предприятия в i-м месте;

D — матрица, состоящая из компонент d_{ij}, которые показывают приоритетность посещения i-го предприятия j-м потребителем. Неравенство $d_{i_1 j} > d_{i_2 j}$ означает, что для j-го потребителя посещение i_1-го предприятия более предпочтительно, чем i_2-го.

Математическая модель

Оптимизационные стратегии:

$u \in \{0,1\}^m$ — вектор размещения предприятий, компоненты u_i которого показывают, открыто ли предприятие в i-ом месте или нет, если открыто, то $u_i = 1$, иначе $u_i = 0$;

$V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица посещаемости, элементы v_{ij} которой показывают, пошел ли в i-е предприятие j-й потребитель руководствуясь матрицей приоритетностей D, если пошел, то $v_{ij} = 1$, иначе $v_{ij} = 0$.

Случайные параметры модели:

X_{ij} — компоненты матрицы доходностей, распределенные по нормальному закону $\mathcal{N}(m_{ij}, \sigma_{ij}^2)$, где m_{ij} — математическое ожидание, σ_{ij}^2 — дисперсия.

Математическая модель

Функция потерь:

$$\Phi(u,x) = \sum_{i=1}^{m} f_i u_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_{ij}, \tag{1}$$

$\sum\limits_{i=1}^{m} f_i u_i$ — общие затраты на открытие предприятия(ий),
$\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} v_{ij} x_{ij}$ — доход от посещения потребителями предприятия(ий).

Постановка задачи

Рассмотрим функцию вероятности

$$P_\varphi(u, V) \triangleq \mathcal{P}\{\Phi(u, V, X) \leqslant \varphi\}. \tag{2}$$

и функцию квантили

$$\varphi_\alpha(u, V) \triangleq \min_\varphi\{\varphi : P_\varphi(u, V) \geqslant \alpha\}, \qquad \alpha \in (0, 1). \tag{3}$$

Сформулируем оптимизационную задачу

$$u_\alpha = \arg \min_{(u,V)\in U} \varphi_\alpha(u, V),\ \varphi_\alpha = \min_{(u,V)\in U} \varphi_\alpha(u, V), \alpha \in (0, 1).$$

$$U = \{(u, V) : \sum_{i=1}^{m} v_{ij} = 1, \quad u_i + \sum_{l:d_{lj}<d_{ij}} v_{lj} \leq 1, \ \ i \in I, j \in J\} \tag{4}$$

Свойства задачи

Утверждение 1

Для каждого значения $u \neq 0$ существует единственное допустимое значение матрицы V.

Математическое ожидание в векторно-матричном виде

$$\mu = f^T u - \tilde{v}^T \tilde{m}, \tag{5}$$

где векторы $\tilde{m}, \tilde{v}$ есть вектор-столбцы, вытянутые по строкам из матриц $\{m_{ij}\}_{i=1,j=1}^{i=m,j=n}, \{v_{ij}\}_{i=1,j=1}^{i=m,j=n}$ соответственно.

Дисперсия в векторно-матричном виде

$$\sigma^2 = \tilde{v}^T \tilde{K} \tilde{v}, \tag{6}$$

где матрица $\tilde{K} = \mathbf{cov}(\tilde{X})$.

Свойства задачи

Параметры распределения критериальной функции:

$$\Phi(u, V, X) \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{m} f_i u_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} m_{ij}, \sum_{l=1}^{mn}\sum_{k=1}^{mn} \widetilde{v}_l \widetilde{v}_k \widetilde{K}_{lk}\right). \quad (7)$$

Утверждение 2

Квантиль $\varphi_\alpha(u, V)$ функции потерь выражается через квантиль x_α стандартного нормального распределения:

$$\varphi_\alpha(u, V) = x_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (v_{ij})^2 D\left[X_{ij}\right] + 2 \sum_{1 \le p < q \le nm} \widetilde{v}_p \widetilde{v}_q \widetilde{K}_{pq}} + \sum_{i=1}^{m} f_i u_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} m_{ij}. \quad (8)$$

Метод имитации отжига

1) На входе: минимальная температура t_{min}, начальная температура t_{max}.
2) Задается начальное произвольное состояние вектора u_0.
3) $i := 1, \quad t_1 = t_{max}$
4) Пока $t_i > t_{min}$
   a) генерируется новое состояние u_c на основе предыдущего u_{i-1}
   b) $\triangle\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(u_c) - \varphi_\alpha(u_{i-1})$
   c) если $\triangle\varphi_\alpha \leq 0$, то $u_i = u_c$
   d) если $\triangle\varphi_\alpha > 0$, то генерируется реализация равномерной случайной величины ξ на (0,1)
   e) если $\xi < \exp(-\frac{\triangle\varphi_\alpha}{t_i})$,то $u_i = u_c$
   f) если $\xi \geq \exp(-\frac{\triangle\varphi_\alpha}{t_i})$, то $u_i = u_{i-1}$
   g) $t_{i+1} = ct_i$, где $0,9 \leq |c| < 1$, $i := i + 1$, перейти к (4).

Пример №1. Рассмотрим задачу в случае, когда предприниматель может открыть в $m = 10$ местах предприятия, которые планируют посетить $n = 20$ потребителей. Вектор f цен и матрица D приоритетностей известны. Матрица X доходностей случайна, элементы которой зависимы, имеет 20 реализаций.

α	0,6	0,8	0,95
Значение критериальной функции	-201,1	-188,2	-170,6
Место(а) открытого(ых) предприятий	2,6	4	4
Время расчета (сек)	2,49	2,28	2,46

Таблица: Результаты численного эксперимента.

Численный эксперимент. График

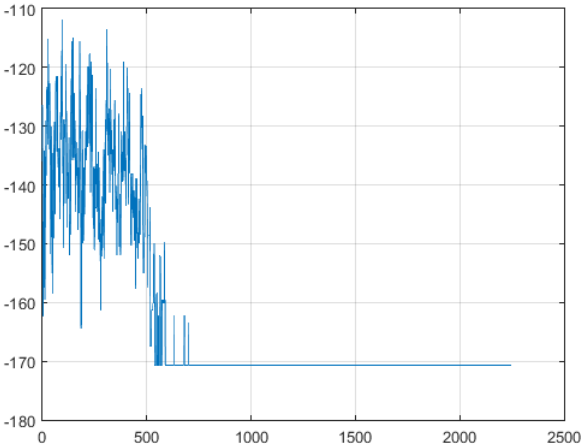

График изменения критериальной функции при $\alpha = 0.95$

Численный эксперимент.

Пример №2. Рассмотрим задачу в случае, когда предприниматель может открыть в $m = 20$ местах предприятия, которые планируют посетить $n = 1000$ потребителей. Вектор f цен и матрица D приоритетностей известны. Матрица X доходностей случайна, элементы которой зависимы, имеет 50 реализаций.

α	0,6	0,8	0,95
Значение критериальной функции	-21654	-21344	-21113
Место(а) открытого(ых) предприятий	5,8,9	4,8,9	4,8,9
Время расчета (сек)	6355	6574	6453

Таблица: Результаты численного эксперимента.

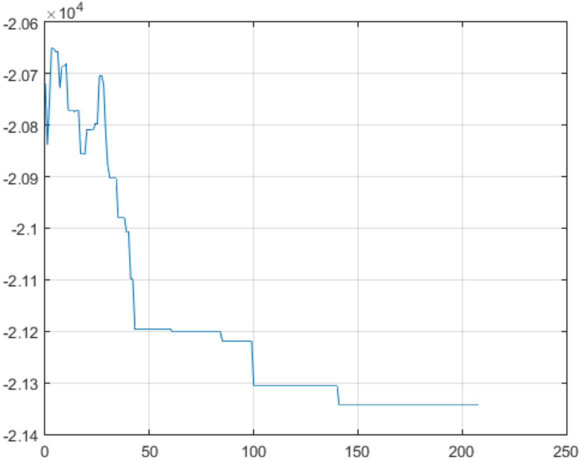

График изменения критериальной функции при $\alpha = 0.8$

Заключение

Результаты работы:

- Сформулирована стохастическая задача размещения предприятий с критерием в форме квантили.
- Исходная задача сведена к задаче целочисленного программирования.
- Для решения задачи применен метод имитации отжига.
- Проведены численные эксперименты.